

参考答案及解析

全真模拟(一)

一、选择题

1. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$ ($\arctan x$ 是有界函数),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \text{ (用无穷小代换: } \arctan x \sim x (x \rightarrow 0) \text{)},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \text{ (} x \rightarrow \infty \text{ 时 } \frac{1}{x} \text{ 为无穷小量, 而 } \sin x \text{ 是有界函数, 注意 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{)}.$$

2. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点可导、连续的性质知识点.

【应试指导】 从四个选项的内容来看, 我们可以一步一步地处理, $x=0$ 时, $y=1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (|x|+1) = 1, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续.}$$

y 在 $x=0$ 的可导性可从左右导数出发进行讨论.

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

由于 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 故应选 C.

3. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 因为 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, 所以 $y' =$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = 0; \text{ 当 } x > 0 \text{ 时,}$$

$y' > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 故在 $(-1, 1)$ 内, 函数有增有减.

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的凸区间的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x) = x^4 - 24x^2 + 6x$, 则 $f'(x) =$

$$4x^3 - 48x + 6, f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4), \text{ 令 } f''(x) < 0, \text{ 有 } x^2 - 4 < 0, \text{ 于是 } -2 < x < 2, \text{ 即凸区间为 } (-2, 2).$$

5. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 解法 1:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx = \int_0^4 f(\sqrt{x}) \cdot 2d(\sqrt{x}) = 2 \times \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_0^4 = 16.$$

解法 2:

$$\text{因 } \int_0^x f(t) dt = \frac{x^4}{2}, \text{ 于是 } f(x) = 2x^3, \text{ 从而}$$

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} dx = 2 \int_0^4 x dx = \left. x^2 \right|_0^4 = 16.$$

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 解法 1:

因 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ 为奇函数, 故由积分性质知,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = 0.$$

解法 2:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} d(1 + \cos x) = - \ln(1 + \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 因 $\int_{-\infty}^0 e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} \Big|_{-\infty}^0 =$

$$\begin{cases} \frac{1}{k}, & k > 0, \\ \infty, & k \leq 0, \end{cases} \text{ 故 } k > 0, \text{ 由题意知 } \frac{1}{k} = \frac{1}{3}, \text{ 从而 } k = 3.$$

8. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = xe^{xy}$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot$

$$y = (1 + xy)e^{xy}.$$

9. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x + e^{x^2 y} \cdot x^2$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \frac{1}{2} + e^2$.

注:也可先将 $x=1$ 代入, 则 $z|_{(1,y)} = \ln y + e^y$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} + e^y, \text{ 所以 } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \frac{1}{2} + e^2.$$

10. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了古典概率的知识点.

【应试指导】 因两封信投向四个邮筒共有的投法(可重复排列)为 $n=4^2=16$; 满足1,2号邮筒各有一封信的投法为 $k=A_2^2=2$, 故所求概率为

$$P = \frac{k}{n} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

二、填空题

11. 【答案】 e^{-6}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2} \cdot (-6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}} \right]^{-6} = e^{-6}.$$

12. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y' = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x$, 令 $x=0$, 则

$$y'|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

13. 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ 两边对 x 求导(注意 y 是 x 的函数),

$$\text{因 } 2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 2,$$

$$\text{故 } y' = \frac{2-2x-2y}{2x-2y} = \frac{1-x-y}{x-y}.$$

$$\text{令 } x=2, \text{ 且 } y|_{x=2} = 0, \text{ 则 } y'|_{x=2} = -\frac{1}{2}.$$

14. 【答案】 $y=1$

【考情点拨】 本题考查了曲线在一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 由 $x^2 + y^2 = 2x$, 两边对 x 求导得 $2x +$

$$2yy' = 2, \text{ 取 } x=1, y=1, \text{ 则 } y'|_{x=1} = 0,$$

所以切线方程为 $y=1$.

15. 【答案】 $(1,1)$

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6$, 令 $y'' = 0$, 得 $x=1$. 则当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$; 当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$. 又因 $x=1$ 时 $y=1$, 故点 $(1,1)$ 是拐点(因 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处有二阶导数, 故没有其他形式的拐点).

16. 【答案】 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + 2x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (\sqrt{x} - 1) \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} - 1 + x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1}) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + 2x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C.$$

17. 【答案】 $-\frac{2}{3}\cos^3 x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \sin 2x \cos x dx = \int 2 \sin x \cos^2 x dx$

$$= -\int 2 \cos^2 x d \cos x$$

$$= -2 \times \frac{1}{3} \cos^3 x + C = -\frac{2}{3} \cos^3 x + C.$$

18. 【答案】 $\frac{2}{27}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{10-6x}} dx$

$$= \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{-6x}{\sqrt{10-6x}} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \int_{-1}^1 \frac{-6x+10-10}{\sqrt{10-6x}} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \int_{-1}^1 \sqrt{10-6x} dx + \frac{10}{6} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{10-6x}}$$

$$= -\frac{1}{6} \int_{-1}^1 \left[-\frac{1}{6}(10-6x)^{\frac{1}{2}}\right] d(10-6x) +$$

$$\frac{10}{6} \int_{-1}^1 \left[-\frac{1}{6}(10-6x)^{-\frac{1}{2}}\right] d(10-6x)$$

$$= \frac{1}{36} \times \frac{2}{3} (10-6x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 - \frac{10}{36} \times 2(10-6x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{54} \times (8-64) - \frac{5}{9} \times (2-4) = \frac{2}{27}.$$

注:本题可另解如下:令 $\sqrt{10-6x} = t$, 则 $x = \frac{1}{6}(10-t^2)$.

$$\text{所以 } \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{10-6x}} dx$$

$$= \int_4^2 \frac{\frac{1}{6}(10-t^2)}{t} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{18} \int_2^4 (10 - t^2) dt \\
&= \frac{1}{18} \left(10t - \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_2^4 \\
&= \frac{1}{18} \times \left(40 - \frac{64}{3} - 20 + \frac{8}{3} \right) = \frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

19. 【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了定积分的分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - (e - 1) = 1.$

20. 【答案】 $-\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = \ln(x + e^y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + e^y}$,
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{-e^y}{(x + e^y)^2}.$

三、解答题

21. 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \sqrt{1-x^2})}{(1 - \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1-x^2})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \sqrt{1-x^2})}{x^2}$
 $= 2.$

注: 本题也可用洛必达法则求解.

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sqrt{1-x^2} = 2.$

本题还可利用变量代换求解如下: 令 $\sqrt{1-x^2} = t$,

原式 $= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t^2}{1-t} = \lim_{t \rightarrow 1} (1+t) = 2.$

22. 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$

23. $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a xe^{-x} dx = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x de^{-x}$
 $= \lim_{a \rightarrow +\infty} (-ae^{-a}) \Big|_0^a + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-x} dx$
 $= \lim_{a \rightarrow +\infty} (-ae^{-a}) + \lim_{a \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^a$
 $= \lim_{a \rightarrow +\infty} (1 - e^{-a}) = 1.$

24. 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} f(xy) + \frac{1}{x} f'(xy) \cdot y + y f'(x+y)$,
 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x} [f''(xy) + y f''(xy) \cdot x] + f''(x+y) + y f''(x+y)$
 $= y f''(xy) + f''(x+y) + y f''(x+y).$

25. 依题意, 随机变量 X 只能取值 3, 4, 5; 且 $P\{X =$

$3\} = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10};$

$P\{X = 4\} = \frac{C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}; P\{X = 5\} = \frac{C_2^2}{C_5^3} = \frac{6}{10}.$

所以 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

26. $y' = 6x^2 - 6x - 12, y'' = 12x - 6.$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 2$,

当 $x_2 = 2$ 时, $y'' = 18 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取极小值 -6 .

当 $x_1 = -1$ 时, $y'' < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极大值 21 .

又令 $y'' = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$, 从而曲线为凸的, 即函数曲线的凸区间为 $(-\infty, \frac{1}{2})$; $x > \frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$, 从而曲线为凹

的, 即函数曲线的凹区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$; 又因 $f(\frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$, 故曲线的拐点为 $(\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$.

27. 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy^2) \cdot y^2 + e^{x^2y} \cdot 2xy$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy^2) \cdot 2xy + e^{x^2y} \cdot x^2$,

所以 $dz = [y^2 \cos(xy^2) + 2xye^{x^2y}]dx + [2xycos(xy^2) + x^2e^{x^2y}]dy.$

28. 证法 1: 在 $[0, x]$ 上令 $F(x) = e^x$, 则使用拉格朗日定理得,

$F(x) - F(0) = F'(\xi)(x - 0), \xi \in (0, x)$, 即 $e^x - 1 = e^\xi \cdot x$,

由于 $e^\xi > 1$, 所以 $e^x - 1 > x$, 即 $e^x > 1 + x$.

证法 2: 令 $G(x) = e^x - 1 - x$, 则 $G'(x) = e^x - 1$, 故在 $[0, x]$ 内 $G'(x) > 0$,

所以在 $[0, x]$ 上 $G(x)$ 单调递增, 由 $G(0) = 0$, 得 $x > 0$ 时, $G(x) > 0$,

即 $e^x - 1 - x > 0$, 亦即 $e^x > 1 + x$.

全真模拟(二)

一、选择题

1. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 经实际计算及无穷小量定义知应选 C.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} |x| = -\infty,$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \infty.$

注: 先观察四个选项, 从已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 先把 A 排除, 再利用 $\ln x$ 的性质可把 B 排除, C 自然可验证是正确的, 由 $\cot x$ 的性质, 可排除 D 项.

【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线的知识.

【应试指导】 由 $y = x^3 - 3x$ 得 $y' = 3x^2 - 3$, 令 $y' = 0$, 得 $x = \pm 1$. 经计算 $x = -1$ 时, $y = 2$; $x = 1$ 时, $y = -2$, 故选 C.

【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了复合函数的微分的知识.

【应试指导】 因为 $y = f(e^x)$, 所以, $y' = f'(e^x)e^x dx$.

【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了利用定义求函数的一阶导数的知识.

【应试指导】 因 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{-2f'(x_0)} = \frac{1}{4}$,
于是 $f'(x_0) = -2$.

【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了函数的单调性和凹凸性的知识.

【应试指导】 因 $f'(x) > 0$, 故函数单调递增, 又 $f''(x) < 0$, 所以函数曲线为凸的.

【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识.

【应试指导】 因 $y = (x-1)^3 - 1$, $y' = 3(x-1)^2$, $y'' = 6(x-1)$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 1$, 当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$. 又因 $y|_{x=1} = -1$, 于是曲线有拐点 $(1, -1)$.

【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了不定积分的知识.

【应试指导】 因 $\int f(x) dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, 所以 $f(x) = [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C]' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的敛散性的知识.

【应试指导】 对于选项 A: $\int_1^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 1)$ 不存在, 此积分发散; 对于选项 B: $\int_1^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - e)$ 不存在, 此积分发散; 对于选项 C: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$, 此积分收敛; 对于选项 D: $\int_1^{+\infty} \ln x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \ln x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[(x \ln x) - x \Big|_1^b \right] =$

$\lim_{b \rightarrow +\infty} (b \ln b - b + 1)$ 不存在, 此积分发散.

9. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$, 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy, \text{ 故选 A.}$$

10. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了条件概率的知识.

【应试指导】 设 $A = \{\text{该建筑物使用寿命超过 } 50 \text{ 年}\}$, $B = \{\text{该建筑物使用寿命超过 } 60 \text{ 年}\}$

由题意, $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.6$, 所求概率为:

$$\begin{aligned} P(\bar{B} | A) &= 1 - P(B | A) = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{P(B)}{P(A)} \\ &= 1 - \frac{0.6}{0.8} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25. \end{aligned}$$

二、填空题

11. 【答案】 0

【考点点拨】 本题考查了极限的知识.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x^2 - 3}$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x - \sqrt{3})^2}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} = 0.$$

12. 【答案】 mk

【考点点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识.

$$\begin{aligned} \text{【应试指导】 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + kx)^{\frac{m}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + kx)^{\frac{1}{kx} \cdot km} \\ &= \ln e^{km} = km, \end{aligned}$$

所以当 $f(0) = km$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

13. 【答案】 -1

【考点点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识.

$$\begin{aligned} \text{【应试指导】 } \lim_{h \rightarrow \infty} hf\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) - f(x_0)}{-\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \\ &= -f'(x_0) = -1. \end{aligned}$$

注: 注意导数定义的结构特点.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

14. 【答案】 $2x \cos x - x^2 \sin x + 2^x \ln 2$

【考点点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识.

【应试指导】 $(x^2 \cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x$,

$$(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2, e' = 0,$$

$$\text{所以 } y' = 2x \cos x - x^2 \sin x + 2^x \ln 2.$$

15. 【答案】 0

【考点点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 因函数 $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{1+x^2}$ 在 $[-1, 1]$

上是奇函数, 因此 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x}{1+x^2} dx = 0$.

注: 奇偶函数在对称区间上积分的性质是常考题目之一, 应注意.

16. 【答案】 1

【考点点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos^2 t dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1} = 1$.

17. 【答案】 $\frac{1}{x} + C$

【考点点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx$

$$= \int f'(\ln x) d \ln x$$

$$\stackrel{u = \ln x}{=} \int f'(u) du$$

$$= f(u) + C$$

$$= e^{-u} + C$$

$$= e^{-\ln x} + C$$

$$= \frac{1}{x} + C.$$

本题也可另解如下:

$$\text{由 } f(x) = e^{-x} \text{ 得 } f'(x) = -e^{-x},$$

$$\text{所以 } f'(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x},$$

$$\text{故 } \int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = \int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C.$$

18. 【答案】 $-2xy \sin(xy^2)$

【考点点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = \cos(xy^2)$, 故 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(xy^2) \cdot (xy^2)' = -2xy \sin(xy^2)$.

19. 【答案】 $\frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}$

【考点点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = \frac{(x-2y)^2}{2x+y}$,

$$\text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x-2y) \cdot (2x+y) - 2(x-2y)^2}{(2x+y)^2}$$

$$= \frac{2(x-2y)(2x+y-x+2y)}{(2x+y)^2}$$

$$= \frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}.$$

20. 【答案】 $(1 + xe^y)e^{y+xe^y}$

【考点点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = e^{xe^y}$, 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xe^y} \cdot e^y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xe^y} \cdot xe^y \cdot e^y + e^{xe^y} \cdot e^y$$

$$= (1 + xe^y)e^{y+xe^y}.$$

三、解答题

$$21. \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$$

注: 将分母 $\sin^2 x$ 用与之等价的无穷小量 x^2 代换, 这是一个技巧.

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \sin ax + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(a \cdot \frac{\sin ax}{ax} + 1 \right) = a + 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \sin \frac{1}{x} + b) = b,$$

因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0),$$

$$\text{即 } a + 1 = b = 2, \text{ 即 } a = 1, b = 2.$$

$$23. y' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x, y'' = -\sec^2 x$$

$$\text{所以 } y''(0) = -1.$$

$$24. \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \int (\sin x + \cos x) dx$$

$$= -\cos x + \sin x + C.$$

25. 由题意, X 的所有可能的取值为 1, 2, 3,

$$X = 1, \text{ 即第一次就取到正品, } P\{X = 1\} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$$

$$X = 2, \text{ 即第一次取到次品且第二次取到正品,}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{33};$$

$$\text{同理, } P\{X = 3\} = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{10}{10} = \frac{1}{66}.$$

故 X 的概率分布如下

X	1	2	3
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

$$26. y' = 8x^3 - 24x, y'' = 24x^2 - 24, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = \pm\sqrt{3} \text{ 或 } x = 0.$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = \pm 1; x < -\sqrt{3} \text{ 时, } y' < 0; -\sqrt{3} < x < 0 \text{ 时, } y' > 0;$$

$$0 < x < \sqrt{3} \text{ 时, } y' < 0; x > \sqrt{3} \text{ 时, } y' > 0.$$

于是, 函数的递增区间为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$;

递减区间为 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 和 $(0, \sqrt{3})$; 有极小值

$f(\pm\sqrt{3}) = -18$, 有极大值 $f(0) = 0$.

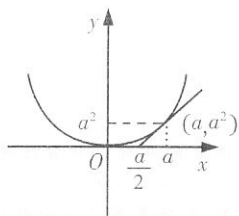
又因当 $-\infty < x < -1$ 时, $y'' > 0$, 则 y 为凹函数;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y'' < 0$, 则 y 为凸函数;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 则 y 为凹函数.

综上得函数 y 的凹区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 凸区间为 $(-1, 1)$, 且拐点为 $(-1, -10)$ 和 $(1, -10)$.

27. 如图所示, 在 $x = a$ 处切线的斜率为 $y' \Big|_{x=a} = 2a$, 切线方程为 $y - a^2 = 2a(x - a)$,



即 $y = 2ax - a^2$,

$$S = \int_0^{a^2} \left(\frac{y+a^2}{2a} - \sqrt{y} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\frac{y^2}{2} + a^2 y \right) \Big|_0^{a^2} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a^2} = \frac{1}{12} a^3.$$

28. 等式两边对 x 求导, 将 y 看做常数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$$\frac{4x+2y-2}{4-2z} = \frac{2x+y-1}{2-z},$$

$$\text{同理 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y+2x-2}{4-2z} = \frac{x+y-1}{2-z},$$

$$\text{所以 } dz = \frac{1}{2-z} [(2x+y-1)dx + (y+x-1)dy].$$

全真模拟(三)

一、选择题

1. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$,

所以 $x \rightarrow 0$ 时, $x + \sin x$ 与 x 是同阶但非等价无穷小.

2. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 对于选项 A: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \neq 0$, 错误;

对于选项 B: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, 正确; 对于选项 C:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x} = \infty \neq 1$, 错误; 对于选项 D: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \neq 1$, 错误.

3. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 因 $f'(1) = 1$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2}.$$

4. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了已知导函数求原函数的知识点.

【应试指导】 因 $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, 于是 $f'(x) = 1 - x$, 两边积分得 $f(x) = x - \frac{1}{2} x^2 + C$, 又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = x - \frac{1}{2} x^2$.

5. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int \cos x f(\sin x) dx$
 $= \int f(\sin x) d \sin x \xrightarrow{u = \sin x} \int f(u) du$
 $= F(u) + C = F(\sin x) + C.$

6. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了定积分的相关知识的知识点.

【应试指导】 由题意知, C 项不成立, 其余各项均成立.

7. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了无穷区间反常积分的发散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2}$, 此积分收敛;

对于选项 B: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$, 此积分收敛;

对于选项 C: $\int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^0 = 1$, 此积分收敛;

对于选项 D: $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{-\infty}^0 = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$, 该极限不存在, 故此积分发散.

8. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = \ln \frac{y}{x}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{1}{x}$.

9. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因 $z = x^3 e^{y^2}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 e^{y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y e^{y^2}$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 3x^2 e^{y^2} dx + 2x^3 y e^{y^2} dy = x^2 e^{y^2} (3dx + 2xydy)$.