

数 学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分 150 分。考试时间 150 分钟。

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共 85 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, 则 $M \cap N =$ 【 】
 A. $\{2, 4\}$ B. $\{2, 4, 6\}$
 C. $\{1, 3, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. 函数 $y = 3\sin \frac{x}{4}$ 的最小正周期是 【 】
 A. 8π B. 4π
 C. 2π D. $\frac{2\pi}{3}$
3. 函数 $y = \sqrt{x(x-1)}$ 的定义域为 【 】
 A. $\{x \mid x \geq 0\}$ B. $\{x \mid x \geq 1\}$
 C. $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$
4. 设 a, b, c 为实数, 且 $a > b$, 则 【 】
 A. $a - c > b - c$ B. $|a| > |b|$
 C. $a^2 > b^2$ D. $ac > bc$
5. 若 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 且 $\sin \theta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \theta =$ 【 】
 A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
6. 函数 $y = 6\sin x \cos x$ 的最大值为 【 】
 A. 1 B. 2
 C. 6 D. 3

7. 右图是二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的部分图像, 则

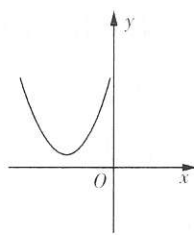
A. $b > 0, c > 0$

B. $b > 0, c < 0$

C. $b < 0, c > 0$

D. $b < 0, c < 0$

【 】



8. 已知点 $A(4,1), B(2,3)$, 则线段 AB 的垂直平分线方程为

A. $x - y + 1 = 0$

B. $x + y - 5 = 0$

C. $x - y - 1 = 0$

D. $x - 2y + 1 = 0$

【 】

9. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 是

A. 奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增

B. 偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

C. 奇函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 单调递减

D. 偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 单调递增

【 】

10. 一个圆上有 5 个不同的点, 以这 5 个点中任意 3 个为顶点的三角形共有

A. 60 个

B. 15 个

C. 5 个

D. 10 个

【 】

11. 若 $\lg 5 = m$, 则 $\lg 2 =$

A. $5m$

B. $1 - m$

C. $2m$

D. $m + 1$

【 】

12. 设 $f(x+1) = x(x+1)$, 则 $f(2) =$

A. 1

B. 3

C. 2

D. 6

【 】

13. 函数 $y = 2^x$ 的图像与直线 $x + 3 = 0$ 的交点坐标为

A. $\left(-3, -\frac{1}{6}\right)$

B. $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$

C. $\left(-3, \frac{1}{6}\right)$

D. $\left(-3, -\frac{1}{8}\right)$

【 】

14. 双曲线 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ 的焦距为

A. 1

B. 4

C. 2

D. $\sqrt{2}$

【 】

15. 已知三角形的两个顶点是椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点, 第三个顶点在 C 上, 则该三角形

的周长为

A. 10

B. 20

C. 16

D. 26

【 】

16. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 a_4 = 10$, 则 $a_1 a_6 + a_2 a_5 =$

A. 100

B. 40

C. 10

D. 20

【 】

17. 若 1 名女生和 3 名男生随机地站成一列, 则从前面数第 2 名是女生的概率为

【 】

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 3)$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} =$ _____.

19. 已知直线 l 和 $x - y + 1 = 0$ 关于直线 $x = -2$ 对称, 则 l 的斜率为 _____.

20. 若 5 条鱼的平均质量为 0.8 kg, 其中 3 条的质量分别为 0.75 kg, 0.83 kg 和 0.78 kg, 则其余 2 条的平均质量为 _____ kg.

21. 若不等式 $|ax + 1| < 2$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$, 则 $a =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_2 + a_4 - 2a_1 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公差 d ;

(2) 若 $a_1 = 2$, 求 $\{a_n\}$ 前 8 项的和 S_8 .

23. (本小题满分 12 分)

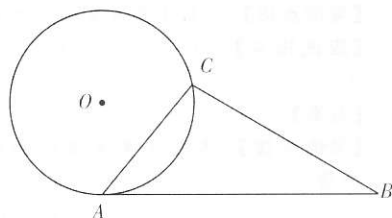
设直线 $y = x + 1$ 是曲线 $y = x^3 + 3x^2 + 4x + a$ 的切线, 求切点坐标和 a 的值.

24. (本小题满分 12 分)

如图, AB 与半径为 1 的 $\odot O$ 相切于 A 点, $AB = 3$, AB 与 $\odot O$ 的弦 AC 的夹角为 50° . 求

(1) AC ;

(2) $\triangle ABC$ 的面积. (精确到 0.01)



25. (本小题满分 13 分)

已知关于 x, y 的方程 $x^2 + y^2 + 4x\sin\theta - 4y\cos\theta = 0$.

(1) 证明: 无论 θ 为何值, 方程均表示半径为定长的圆;

(2) 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 判断该圆与直线 $y = x$ 的位置关系.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为交集.

【应试指导】 $M \cap N = \{2, 4\}$.

2. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为最小正周期.

【应试指导】 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$.

3. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为定义域.

【应试指导】 $x(x-1) \geq 0$ 时, 原函数有意义, 即 $x \geq 1$ 或 $x \leq 0$.

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的性质.

【应试指导】 $a > b$, 则 $a - c > b - c$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数.

【应试指导】 因为 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 所以 $\cos \theta < 0$, $\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

6. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的最大值.

【应试指导】 $y = 6\sin x \cos x = 3\sin 2x$, 当 $\sin 2x = 1$ 时 y 取最大值 3.

7. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为二次函数图像.

【应试指导】 由图像可知, 当 $x = 0$ 时 $y = c > 0$, 也就是图像与 y 轴的交点; 图像的对称轴 $x = -\frac{b}{2} < 0$, 则 $b > 0$.

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为垂直平分线方程.

【应试指导】 线段 AB 的斜率为 $k_1 = \frac{3-1}{2-4} = -1$, A 、 B 的中点坐标为 $(3, 2)$, 则 AB 的垂直平分线方程 $y - 2 = x - 3$, 即 $x - y - 1 = 0$.

9. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶

性及单调性.

【应试指导】 $f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x)$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$,

当 $x < 0$ 或 $x > 0$ 时 $f(x) < 0$, 故 $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

10. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为数列组合.

【应试指导】 $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$.

11. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数.

【应试指导】 $\lg 2 = \lg \frac{10}{5} = 1 - \lg 5 = 1 - m$.

12. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数.

【应试指导】 $f(2) = f(1+1) = 1 \times (1+1) = 2$.

13. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为线的交点.

【应试指导】 $x+3=0$, $x=-3$, $y=2^{-3}=\frac{1}{8}$, 则函数 $y=2^x$ 与直线 $x+3=0$ 的交点坐标为 $(-3, \frac{1}{8})$.

14. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的焦距.

【应试指导】 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$, 则双曲线的焦距 $2c = 4$.

15. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为椭圆的性质.

【应试指导】 椭圆的两个焦点的距离为 $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 6$. 又因为第三个顶点在 C 上, 则该点与两个焦点间的距离的和为 $2a = 2 \times 5 = 10$, 则三角形的周长为 $10 + 6 = 16$.

16. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等比数列.

【应试指导】 $a_3 a_4 = a_1 q^2 \cdot a_1 q^3 = a_1^2 q^5 = 10$, $a_1 a_6 = a_1^2 q^5$, $a_2 a_5 = a_1 q \cdot a_1 q^4 = a_1^2 q^5$, $a_1 a_6 + a_2 a_5 = 2a_1 a_4 = 20$.

17. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的概率.

【应试指导】 设 A 表示第 2 名是女生, $P(A) =$

$$\frac{1}{C_4^1} = \frac{1}{4}.$$

二、填空题

18. 【答案】 $(-4, 13)$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为平面向量.

【应试指导】 $2a + 3b = 2(1, 2) + 3(-2, 3) = (-4, 13).$

19. 【答案】 -1

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的性质.

【应试指导】 $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x = -2, \end{cases}$ 得交点 $(-2, -1)$,

取直线 $x - y + 1 = 0$ 上一点 $(0, 1)$, 则该点关于直线 $x = -2$ 对称的点坐标为 $(-4, 1)$, 则直线 l 的斜率 $k = -1$.

20. 【答案】 0.82

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为平均数.

【应试指导】 5 条鱼的总重为 $5 \times 0.8 = 4(\text{kg})$, 剩余 2 条鱼的总重为 $4 - 0.75 - 0.83 - 0.78 = 1.64(\text{kg})$, 则其平均重量为 $\frac{1.64}{2} = 0.82(\text{kg})$.

21. 【答案】 2

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的解集.

【应试指导】 $|ax + 1| < 2 \Rightarrow -2 < ax + 1 < 2 \Rightarrow -\frac{3}{a} < x < \frac{1}{a}$, 由题意知 $a = 2$.

三、解答题

22. 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以

$$(1) a_2 + a_4 - 2a_1 = a_1 + d + a_1 + 3d - 2a_1 = 4d = 8,$$

$$d = 2.$$

$$(2) S_8 = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 2 \times 8 + \frac{8 \times (8-1)}{2} \times 2 = 72.$$

23. 因为直线 $y = x + 1$ 是曲线的切线,

$$\text{所以 } y' = 3x^2 + 6x + 4 = 1,$$

解得 $x = -1$.

当 $x = -1$ 时, $y = 0$,

即切点坐标为 $(-1, 0)$.

故 $0 = (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) + a = 0$ 解得 $a = 2$.

24. (1) 连结 OA , 作 $OD \perp AC$ 于 D .

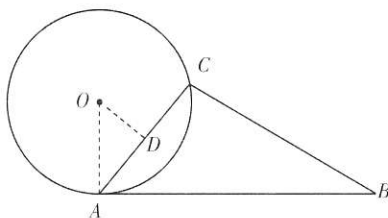
因为 AB 与圆相切于 A 点, 所以 $\angle OAB = 90^\circ$.

则 $\angle OAC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

$$AC = 2AD$$

$$= 2OA \cdot \cos \angle OAC$$

$$= 2 \cos 40^\circ \approx 1.54.$$



$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \cos 40^\circ \times \sin 50^\circ = 3 \cos^2 40^\circ \approx 1.78.$$

25. (1) 证明:

化简原方程得

$$x^2 + 4x \sin \theta + 4 \sin^2 \theta + y^2 - 4y \cos \theta + 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta - 4 \cos^2 \theta = 0,$$

$$(x + 2 \sin \theta)^2 + (y - 2 \cos \theta)^2 = 4,$$

所以, 无论 θ 为何值, 方程均表示半径为 2 的圆.

(2) 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 该圆的圆心坐标为

$$O(-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

圆心 O 到直线 $y = x$ 的距离

$$d = \frac{|-\sqrt{2} - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 2 = r.$$

即当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 圆与直线 $y = x$ 相切.