绝密★启用前

2017年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间120分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \to 0$ 时,下列变量是无穷小量的为　　【　　】

A. $\dfrac{1}{x^2}$　　B. 2^x

C. $\sin x$　　D. $\ln(x+\mathrm{e})$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x =$　　【　　】

A. e　　B. e^{-1}

C. e^2　　D. e^{-2}

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, x\neq 0,\\ a, x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$　　【　　】

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

4. 设函数 $f(x)=x\ln x$,则 $f'(\mathrm{e})=$　　【　　】

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

5. 函数 $f(x)=x^3-3x$ 的极小值为　　【　　】

A. -2　　B. 0

C. 2　　D. 4

6. 方程 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 表示的二次曲面是 【　】

A. 圆锥面　　B. 旋转抛物面

C. 球面　　D. 椭球面

7. 若 $\int_0^1 (2x+k)\mathrm{d}x=1$，则常数 $k=$ 【　】

A. -2　　B. -1

C. 0　　D. 1

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，则 【　】

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$　　B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<0$

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$　　D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的符号无法确定

9. 空间直线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$ 的方向向量可取为 【　】

A. $(3,-1,2)$　　B. $(1,-2,3)$

C. $(1,1,-1)$　　D. $(1,-1,-1)$

10. 已知 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a^2}$ 【　】

A. 发散　　B. 条件收敛

C. 绝对收敛　　D. 收敛性与 a 的取值有关

第Ⅱ卷（非选择题，共 110 分）

得　分	评卷人

二、填空题(11～20 小题，每小题 4 分，共 40 分)

11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin(x-2)}=$ ________.

12. 曲线 $y=\frac{x+1}{2x+1}$ 的水平渐近线方程为________.

13. 若函数 $f(x)$ 满足 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=$ ________.

14. 设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=$ ________.

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=$ ________.

16. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2}} \mathrm{d}x =$ ________.

17. 已知曲线 $y = x^{2} + x - 2$ 的切线 l 斜率为 3，则 l 的方程为________.

18. 设二元函数 $z = \ln(x^{2} + y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x} =$ ________.

19. 设 $f(x)$ 为连续函数，则$\left(\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right)' =$ ________.

20. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{3^{n}}$ 的收敛半径为________.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28 题，共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21.（本题满分 8 分）

求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - \sin x - 1}{x^{2}}$.

22.（本题满分 8 分）

设$\begin{cases} x = 1 + t^{2}, \\ y = 1 + t^{3}, \end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

23.(本题满分 8 分)

已知 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

24.(本题满分 8 分)

计算$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

密 封 线 内 不 要 答 题

25.(本题满分 8 分)

设二元函数 $z=x^2y^2+x-y+1$,求$\frac{\partial z}{\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

26.(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

27.(本题满分 10 分)

求微分方程 $y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2$ 的通解.

28.(本题满分 10 分)

用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形有盖桶,证明当圆柱的高等于底面直径时,所使用的铁皮面积最小.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\mathrm{e}^2$.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}=a=f(0)=\frac{1}{2}$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了导数的基本公式的知识点.

【应试指导】 因为 $f'(x)=\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$,所以 $f'(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}+1=2$.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了极小值的知识点.

【应试指导】 因为 $f'(x)=3x^2-3$,令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-1,x_2=1$. 又 $f''(x)=6x,f''(-1)=-6<0,f''(1)=6>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x_2=1$ 处取得极小值,且极小值 $f(1)=1-3=-2$.

6.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二次曲面的知识点.

【应试指导】 可将原方程化为 $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{\frac{1}{3}}=1$,所以原方程表示的是椭球面.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1(2x+k)\mathrm{d}x=(x^2+kx)\Big|_0^1=1+k=1$,所以 $k=0$.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分性质的知识点.

【应试指导】 若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$,则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值为由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=b,y=0$ 所围成图形的面积,所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了直线方程的方向向量的知识点.

【应试指导】 因为直线方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$,所以其方向向量为 $(3,-1,2)$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了级数的收敛性的知识点.

【应试指导】 $n\to\infty$ 时,$u_n=(-1)^n\frac{1}{n+a^2}\to 0$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n+a^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+a^2}$,因为 $\frac{1}{n+a^2}\leqslant\frac{1}{n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+a^2}\right|$ 发散. 由莱布尼茨判别法知,$v_n=\frac{1}{n+a^2}>v_{n+1}=\frac{1}{n+1+a^2}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$ 收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a^2}$ 条件收敛.

二、填空题

11.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin(x-2)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}}=1$.

12.【答案】 $y=\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了水平渐近线方程的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$,所求曲线的水平渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}$.

13.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=2\times\frac{1}{2}=1$.

14.【答案】 $1+\frac{1}{x^2}$

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的性质的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x)=x-\frac{1}{x}$，$f'(x)=x'-\left(\frac{1}{x}\right)'=1+\frac{1}{x^2}$.

15.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了函数的定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=0+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2$.

16.【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$.

17.【答案】 $3x-y-3=0$

【考情点拨】 本题考查了切线的知识点.

【应试指导】 曲线上某一点的切线斜率为 $k=y'=2x+1$，因为该切线的斜率为3，即 $k=2x+1=3$，$x=1$，$y\Big|_{x=1}=0$，即切线过点(1,0)，所求切线为 $y=3(x-1)$，即 $3x-y-3=0$.

18.【答案】 $\frac{2x}{x^2+y}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数偏导数的知识点.

【应试指导】 $z=\ln(x^2+y)$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x^2)'}{x^2+y}=\frac{2x}{x^2+y}$.

19.【答案】 $f(x)$

【考情点拨】 本题考查了导数的原函数的知识点.

【应试指导】 $\left(\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$.

20.【答案】 3

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$，故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=3$.

三、解答题

21. $$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}.$$

22. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t.$$

23. 因为 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以
$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\sin x+C.$$

24. 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，$0\leqslant t\leqslant 2$.
$$\begin{aligned}\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\int_0^2\frac{2t}{1+t}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\&=2\left[t\Big|_0^2-\ln(1+t)\Big|_0^2\right]\\&=2\times(2-\ln3)\\&=4-2\ln3.\end{aligned}$$

25. 因为 $z=x^2y^2+x-y+1$，所以
$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y-1.$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2+1,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy.$$

26. D 可表示为 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$0\leqslant r\leqslant2$.
$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D r\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2r^2\mathrm{d}r\\&=2\pi\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^2\\&=\frac{16}{3}\pi.\end{aligned}$$

27. $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2$,

$y\mathrm{d}y=x^2\mathrm{d}x$,

两边同时积分，$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{3}x^3+C_1$,

$3y^2=2x^3+C_1$.

即 $y^2=\frac{2}{3}x^2+C$.

28. 设圆柱形的底面半径为 r，高为 h，则 $V=\pi r^2h$.

所用铁皮面积 $S=2\pi r^2+2\pi rh$,

令 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=4\pi r-2\pi h=0$,

$2r=h$.

$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}r^2}=4\pi>0$.

于是由实际问题得，S 存在最小值，即当圆柱的高等于底面直径时，所使用的铁皮面积最小.