

高等数学(二)

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第I卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列各无穷小量中与 x^2 等价的是 【 】
 A. $x\sin^2 x$ B. $x\cos^2 x$ C. $x\sin x$ D. $x\cos x$
- 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是 【 】
 A. $y = \sqrt[3]{x^5}$ B. $y = \sqrt[5]{x^3}$ C. $y = \sin x$ D. $y = x^2$
- 函数 $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ 的单调递减区间是 【 】
 A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$
- 曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ 的凸区间是 【 】
 A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
- 曲线 $y = e^{2x} - 4x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 【 】
 A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx =$ 【 】
 A. $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ B. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ C. $\frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$ D. $-\frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$
- $\int_0^1 2^x dx =$ 【 】
 A. $\ln 2$ B. $2\ln 2$ C. $\frac{1}{\ln 2}$ D. $\frac{2}{\ln 2}$

8. 设二元函数 $z = e^{x^2+y}$, 则下列各式中正确的是 【 】

- A. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2}$ B. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^y$ C. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y}$ D. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$

9. 二元函数 $z = x^2 + y^2 - 3x - 2y$ 的驻点坐标是 【 】

- A. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ D. $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

10. 甲、乙两人各自独立射击 1 次, 甲射中目标的概率为 0.8, 乙射中目标的概率为 0.9, 则至少有一人射中目标的概率为 【 】

- A. 0.98 B. 0.9 C. 0.8 D. 0.72

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3x+1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 曲线 $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ 的铅直渐近线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设函数 $f(x) = \sin(1-x)$, 则 $f''(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. 由曲线 $y = x^3$, 直线 $x = 1$, x 轴围成的平面有界区域的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

19. 设二元函数 $z = x^4 \sin y$, 则 $dz \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

20. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x + y$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

22. (本题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = \cos(2x + 1)$, 求 $f'''(0)$.

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 x \arctan x dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 X 的数学期望 EX 及方差 DX .

26. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = x^4 - 4x + 1$.

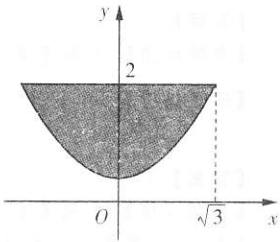
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间.

27. (本题满分 10 分)

记曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 与直线 $y = 2$ 所围成的平面图形为 D (如图中阴影部分所示).

- (1) 求 D 的面积 S ;
- (2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .



28. (本题满分 10 分)

设 $z = \frac{u}{v}$, 其中 $u = x^2y, v = x + y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz .

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】C

【考点点拨】 本题考查了等价无穷小量的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, 所以 $x \sin x$ 与 x^2 等价.

2.【答案】B

【考点点拨】 本题考查了函数的可导性的知识点.

【应试指导】 对于 B 项, 在点 $x = 0$ 处有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = +\infty, \text{即导}$$

数为无穷大, 即 $y = \sqrt[5]{x^3}$ 在 $x = 0$ 处不可导.

3.【答案】A

【考点点拨】 本题考查了函数的单调递减区间的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$, $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{(x+1)^2+1}$, 当 $f'(x) < 0$ 时, 即 $x < -1$, 函数单调递减, 即函数的单调递减区间是 $(-\infty, -1)$.

4.【答案】A

【考点点拨】 本题考查了曲线的凸区间的知识点.

【应试指导】 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$, 令 $y'' = 6x - 6 < 0$, 即 $x < 1$, 曲线 y 是凸的, 即凸区间为 $(-\infty, 1)$.

5.【答案】B

【考点点拨】 本题考查了曲线的切线方程的知识点.

【应试指导】 切线的斜率 $k = y' \Big|_{x=0} = (2e^{2x} - 4) \Big|_{x=0} = -2$, 即切线方程为 $y - 1 = -2x$, $y + 2x - 1 = 0$.

6.【答案】B

【考点点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

7.【答案】C

【考点点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$.

8.【答案】D

【考点点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = e^{x^2+y}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$.

9.【答案】D

【考点点拨】 本题考查了驻点的知识点.

【应试指导】 因为 $z = x^2 + y^2 - 3x - 2y$, $\begin{cases} z_x = 2x - 3 = 0, \\ z_y = 2y - 2 = 0, \end{cases}$ 得驻点 $(\frac{3}{2}, 1)$.

10.【答案】A

【考点点拨】 本题考查了概率的知识点.

【应试指导】 设 A 为甲射中, B 为乙射中, $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.9$. 至少一人射中的概率为 $1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.9) = 1 - 0.02 = 0.98$.

二、填空题

11.【答案】2

【考点点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \frac{3 + 1 - 2}{4 + 5 - 8} = 2$.

12.【答案】 $\frac{1}{3}$

【考点点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3}{3x+1}} = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{3} = \frac{1}{3}.$$

13.【答案】 $x = 1$

【考点点拨】 本题考查了铅直渐近线方程的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \infty$, 则 $x = 1$ 是 $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ 的铅直渐近线.

14.【答案】0

【考点点拨】 本题考查了函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 $f(x) = \sin(1-x)$, $f'(x) = -\cos(1-x)$, $f''(x) = -\sin(1-x)$, $f''(1) = 0$.

15.【答案】 $-\frac{1}{3}$

【考点点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}$.

16.【答案】1

【考点点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1$.

17.【答案】 $\tan x + C$

【考情点拨】 本题考查了原函数的知识点.

【应试指导】 因为 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 所以

$$\int f(x) dx = \tan x + C.$$

18.【答案】 $\frac{1}{4}$

【考情点拨】 本题考查了积分的应用的知识点.

【应试指导】 $S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$

19.【答案】 $2\sqrt{2} dx + \frac{\sqrt{2}}{2} dy$

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 4x^3 \sin y dx +$

$$x^4 \cos y dy, dz \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2} dx + \frac{\sqrt{2}}{2} dy.$$

20.【答案】 $\frac{1}{e^y - 1}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的导数的知识点.

【应试指导】 对 $e^y = x + y$ 两边同时求导, $e^y \cdot$

$$y' = 1 + y', y' = \frac{1}{e^y - 1}.$$

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

22. 因为 $f(x) = \cos(2x + 1)$, 所以

$$f'(x) = -2\sin(2x + 1),$$

$$f''(x) = -4\cos(2x + 1),$$

$$f'''(x) = 8\sin(2x + 1),$$

$$f'''(0) = 8\sin 1.$$

23. 令 $\sqrt[3]{x} = t, x = t^3, dx = 3t^2 dt.$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{x})} dx &= \int \frac{3t^2}{3(1 + t)} dt \\ &= \int \frac{t^2}{1 + t} dt \\ &= \int \frac{t^2 - 1 + 1}{1 + t} dt \\ &= \int (t - 1) dt + \int \frac{1}{1 + t} dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 - t + \ln(1 + t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \int_0^1 x \arctan x dx &= \int_0^1 \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\arctan x) \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arctan x \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$25. E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3$$

$$= 1.$$

$$E(X^2) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2^2 \times 0.3$$

$$= 1.6,$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 1.6 - 1 = 0.6.$$

26. 因为 $f(x) = x^4 - 4x + 1$, 所以

$$f'(x) = 4x^3 - 4,$$

$$f''(x) = 12x,$$

令 $f'(x) = 0, x = 1$, 令 $f''(x) = 0$, 得 $x = 0$.

列表如下,

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	—	-4	—	0	+
y''	—	0	+	12	+

由表可知曲线 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 1)$,

单调递增区间为 $(1, +\infty)$. 凹区间为 $(0, +\infty)$, 凸

区间为 $(-\infty, 0)$, 极小值为 $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$.

$$\begin{aligned} 27. (1) S &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left[2 - \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \right) \right] dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} \right) dx \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 f^2(y) dy \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y - 1) dy \\ &= \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28. \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{x + y^2} \cdot 2xy - \frac{x^2 y}{(x + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 y + 2xy^3}{(x + y^2)^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{1}{x + y^2} \cdot x^2 - \frac{x^2 y}{(x + y^2)^2} \cdot 2y \\ &= \frac{x^3 - x^2 y^2}{(x + y^2)^2} \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \frac{x^2 y + 2xy^3}{(x + y^2)^2} dx + \frac{x^3 - x^2 y^2}{(x + y^2)^2} dy. \end{aligned}$$