

2019 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题

第 I 卷(选择题,共 40 分)

一、选择题(1 ~ 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x + x^2 + x^3 + x^4$ []

- A. 等价无穷小
B. 2 阶无穷小
C. 3 阶无穷小
D. 4 阶无穷小

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$ []

- A. $-e^2$ B. $-e$ C. e D. e^2

3. 设函数 $y = \cos 2x$, 则 $y' =$ []

- A. $2\sin 2x$ B. $-2\sin 2x$
C. $\sin 2x$ D. $-\sin 2x$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在可导, $f'(x) > 0$, $f(a)f(b) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内零点的个数为 []

- A. 3 B. 2
C. 1 D. 0

5. 设 $2x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) =$ []

- A. 0 B. 2 C. x^2 D. $x^2 + C$

6. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 则 $\int f'(x) dx =$ []

- A. $-\arctan x + C$ B. $-\frac{1}{1+x^2} + C$
C. $\arctan x + C$ D. $\frac{1}{1+x^2} + C$

7. 设 $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$, $I_2 = \int_0^1 x^3 dx$, $I_3 = \int_0^1 x^4 dx$ []

- A. $I_1 > I_2 > I_3$ B. $I_2 > I_3 > I_1$
C. $I_3 > I_2 > I_1$ D. $I_1 > I_3 > I_2$

8. 设函数 $z = x^2 e^y$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} =$ []

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

9. 平面 $x + 2y - 3z + 4 = 0$ 的一个法向量为 []

A. $\{1, -3, 4\}$

B. $\{1, 2, 4\}$

C. $\{1, 2, -3\}$

D. $\{2, -3, 4\}$

10. 微分方程 $yy' + (y')^3 + y' = x$ 的阶数为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

第 II 卷(非选择题,共 110 分)

二、填空题(11 ~ 20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 5x, & x < 0, \\ a, & x \geq 0, \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续,则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 函数 $f(x) = x^3 - 12x$ 的极小值点 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. $\int_{-1}^1 x \tan^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 设函数 $z = x^3 + y^2$, $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. 设函数 $z = x \arcsin y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

20. 微分方程 $y' = 2x$ 的通解: $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2kx}{x} = 2$, 求 k .

22. (本题满分 8 分)

设函数 $y = \sin(2x - 1)$, 求 y' .

23. (本题满分 8 分)

设函数 $y = x \ln x$, 求 y'' .

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int (x^{\frac{1}{3}} + e^x) dx$.

25. (本题满分 8 分)

设函数 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, 求 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

26. (本题满分 10 分)

$x = 1 - y^2$ 与 x 轴 y 轴, 在第一象限围成的有界区域, 求:

(1) D 的面积 S ;

(2) D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V .

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 5y' - 6y = 0$ 的通解.

2019 年成人高等学校专升本招生全国统一考试真题参考答案

一、选择题

1. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了等价无穷小的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2+x^3+x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2+x^3) = 1$, 故 $x+x^2+x^3+x^4$ 是 x 的等价无穷小.

2. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot 2} = [\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2 = e^2$.

3. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了复合函数的导数的知识点.

【应试指导】 $y' = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$.

4. 【答案】C

【考情点拨】本题考查了零点存在定理的知识点.

【应试指导】由零点存在定理可知, $f(x)$ 在 (a, b) 上必有零点, 且函数是单调函数, 故其在上只有一个零点.

5. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了函数的原函数的知识点.

【应试指导】由题可知 $\int f(x) dx = 2x + C$, 故 $f(x) = (\int f(x) dx)' = (2x + C)' = 2$.

6. 【答案】C

【考情点拨】本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int f'(x) dx = f(x) + C = \arctan x + C$.

7. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】在区间 $(0, 1)$ 内, 有 $x^2 > x^3 > x^4$, 由积分的性质可知 $\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx > \int_0^1 x^4 dx$, 即 $I_1 > I_2 > I_3$.

8. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = 2 \times 1 \times 1 = 2$.

9. 【答案】C

【考情点拨】本题考查了平面的法向量的知识点.

【应试指导】平面的法向量即平面方程的系数 $\{1, 2, -3\}$.

10. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了微分方程的阶的知识点.

【应试指导】微分方程中导数的最高阶数称为微分方程的阶, 本题最高是2阶导数, 故本题阶数为2.

二、填空题

11. 【答案】2

【考情点拨】本题考查了等价无穷小的代换定理的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.$

12. 【答案】0

【考情点拨】本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0 = f(0) = a.$

13. 【答案】

$$2e^{2x} dx$$

【考情点拨】本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】 $dy = d(e^{2x}) = e^{2x} \cdot (2x)' dx = 2e^{2x} dx.$

14. 【答案】2

【考情点拨】本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$, 当 $x=2$ 或 $x=-2$ 时, $f'(x)=0$, 当 $x < -2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-2 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 因此 $x=2$ 是极小值点.

15. 【答案】 $\arcsin x + C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

16. 【答案】0

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】被积函数 $x \tan^2 x$ 在对称区间 $[-1, 1]$ 上是奇函数, 故 $\int_{-1}^1 x \tan^2 x dx = 0.$

17. 【答案】 $3x^2 dx + 2y dy$

【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, 所以 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 3x^2 dx + 2y dy.$

18. 【答案】0

【考情点拨】本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \arcsin y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

19. 【答案】1

【考情点拨】 本题考查了收敛半径的知识点.

【应试指导】 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, 设 $a_n = n$, 则有 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, 故其收敛半径为

$$R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

20. 【答案】 $x^2 + C$

【考情点拨】 本题考查了可分离变量的微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 微分方程 $y' = 2x$ 是可分离变量的微分方程, 两边同时积分得

$$\int y' dx = \int 2x dx \Rightarrow y = x^2 + C.$$

三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + 2k = 1 + 2k = 2,$$

$$\text{故 } k = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 22. y' &= [\sin(2x-1)]' \\ &= \cos(2x-1) \cdot (2x-1)' \\ &= 2\cos(2x-1). \end{aligned}$$

$$23. y' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1,$$

$$\text{故 } y'' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned} 24. \int (x^{\frac{1}{3}} + e^x) dx &= \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int e^x dx \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} x^{1 + \frac{1}{3}} + e^x + C \\ &= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + e^x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}, \text{故} \\ x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{1}{x^2} \cdot x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{y^2} \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

26. (1) 积分区域 D 可表示为: $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y^2$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (1 - y^2) dy \\ &= \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad V &= \int_0^1 \pi y^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (1-x) dx \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

27. 特征方程 $r^2 - 5r - 6 = 0$, 解得 $r_1 = -1$ 或 $r_2 = 6$, 故微分方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$ (C_1, C_2 为任意常数).

28. 积分区域用极坐标可表示为: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$